ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ВОЛНАХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДОВ [1]

Р.З. Даутов, Е.М. Карчевский, Г.П. Корнилов

1. Введение

Оптические волноводы – это диэлектрические структуры, по которым может распространяться электромагнитная энергия в видимой и инфракрасной областях спектра. Реальные волноводы, используемые в оптической связи, представляют собой гибкие волокна из прозрачных диэлектрических материалов. Поперечное сечение таких волоконных световодов имеет размеры, сравнимые с размерами человеческого волоса, и обычно состоит из трех областей. Центральная область – сердцевина – окружена оболочкой, которая в свою очередь, окружена защитным покрытием. В области сердцевины показатель преломления n может быть постоянным или изменяться по сечению, показатель преломления оболочки обычно постоянен по сечению. Показатель преломления может иметь ступенчатый или градиентный профиль. Для обеспечения направляющих свойств необходимо, чтобы показатель преломления сердцевины хотя бы в части сечения превосходил показатель преломления оболочки. В большинстве случаев основная доля передаваемой энергии распространяется в сердцевине и лишь малая ее часть – по оболочке. Покрытие практически полностью оптически изолировано от сердцевины, поэтому при анализе им обычно пренебрегают и считают, что оболочка снаружи не ограничена. Распространение электромагнитных волн по оптическим волноводам может быть описано строго с помощью уравнений Максвелла.

Исследование спектральных задач теории диэлектрических волноводов и разработка численных методов их решения привлекают большое внимание (см., например, [1], [2], [3] и цитированную там литературу). Традиционный подход к изучению цилиндрических волноводов основывается на определении их собствен-

[1]Работа выполнена при поддержке фонда НИОКР РТ (грант 05-5.1-16.2002 (Ф))

ных волн как электромагнитных волн вида $\Phi(x)\exp(i(\omega t-\beta x_3))$, где $x=(x_1,x_2)$ – вектор поперечных координат, x_3 – продольная координата, β – продольная постоянная распространения, ω – частота колебаний по времени t. Особый интерес представляют поверхностные волны: их амплитуда $\Phi(x)$ экспоненциально стремится к нулю при $|x|\to\infty$, а постоянная распространения β – вещественное число. Основной целью теоретического исследования является анализ дисперсионных кривых, описывающих зависимость между параметрами β и ω, при которых существуют собственные волны.

Хотя первое теоретическое исследование диэлектрических волноводов было проведено Хондросом и Дебаем в 1910 году, интерес к световодам возник только в конце шестидесятых – начале семидесятых годов, когда стало технически возможным получение высокопрозрачных материалов. Изготовление волоконных световодов, способных передавать информацию на десятки километров, стимулировало быстрое развитие методов теоретического анализа их волноводных свойств. Дело в том, что решения уравнений Максвелла, позволяющие точно определить волноводные характеристики, можно получить лишь численными методами. Однако ситуация значительно упрощается, если принять во внимание физические соображения, касающиеся малых изменений показателя преломления в радиальном направлении волоконных световодов, предназначенных для системы дальней связи. В первом приближении для слабонаправляющих волноводов можно заменить уравнения Максвелла скалярным волновым уравнением, а затем перейти к гауссовому приближению, которое дает возможность довольно легко получить аналитические выражения фактически для всех характеристик распространения волны в волоконном световоде с произвольным профилем показателя преломления.

Хорошо известно точное решение задачи о собственных волнах для однородного волновода кругового поперечного сечения (см. , напр., [2], где получено трансцендентное уравнение, связывающее β и ω). На практике используется широкий диапазон волноводов (однородные волокна произвольной геометрии, волокна с переменной по сечению диэлектрической проницаемостью, волноводы, состоящие из двух и более параллельных волокон и т.д.), для которых не удается получить точных решений. Для ряда конкретных волноведущих структур получены приближенные решения (см., напр., [2]). Разработано большое количество различных численных методов (см., напр., обзор [3]). В [4], [5], [6] предложен и исследован алгоритм расчета однородных волноводов с произвольным контуром поперечного сечения, основанный на эквивалентном сведении методом контурных интегральных уравнений исходной задачи к нелинейной спектральной задаче для фредгольмовой голоморфной оператор-функции.

Рассматриваемая нами математическая задача представляет собой спектральную задачу для системы из трех дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости. Задачи в неограниченных областях часто возникают в различных приложениях, таких как акустика, электромагнетизм, аэродинамика, геофизика, подземная гидромеханика, метеорология и т.д.. Существуют различные подходы для решения таких задач. Один из наиболее распространенных подходов базируется на введении искусственной границы Γ, разбивающей исходную область на две части: конечную расчетную область Ω и неограниченную область Ω_∞. На границе Γ ставятся некоторые краевые условия (обеспечивающие, в частности, корректность задачи в области Ω). Задача в ограниченной области Ω решается каким-либо численным методом, и далее, если это необходимо, находится решение в области Ω_∞. Наиболее ответственным в этом подходе является второй шаг: искусственное краевое условие должно быть достаточно точным и простым, чтобы обеспечить успех метода. Особенно это важно при решении волновых задач (проблема постановки точных краевых условий).

Большинство из предложенных краевых условий на искусственной границе являются локальными и приближенными [7]. Более привлекательными являются точные нелокальные условия, позволяющие эквивалентным образом свести исходную задачу в неограниченной области к задаче в ограниченной области. Среди такого класса условий отметим прежде всего "парциальные" краевые условия, введенные А.Г. Свешниковым для решения задачи дифракции на локально неоднородном теле [8]. В дальнейшем они систематически применялись для теоретического исследования и численного решения проекционными методами широкого круга задач теории дифракции (см. [9] и цитированную там литературу). В общем случае это условие имеет вид

$L_\Gamma u = S_\Gamma u$, где L_Γ – дифференциальный оператор естественного краевого условия, порожденного уравнением задачи, а S_Γ – некоторый нелокальный оператор. При специальном выборе контура Г (например, в виде окружности), этот оператор удается выписать в явном виде, используя метод разделения переменных. Такой же подход использовался в работах [7], [10] для решения различных задач в неограниченных областях методом конечных элементов. Метод прост в реализации и, как показывают теоретические оценки и вычислительные эксперименты, является очень эффективным.

Для контура Г произвольной формы используются постановки на основе интегральных уравнений. При этом для вычисления оператора S_Γ требуется решение некоторого интегрального уравнения на Г. В связи с этим отметим работы [11], [12], [13], [14], [15], посвященные комбинированию метода конечных элементов и граничных интегральных уравнений. Недостатком этого подхода является неявное задание оператора S_Γ и достаточная сложность его вычисления.

В данной статье мы представляем формулировку векторной задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов, основанную на использовании "парциальных" краевых условий, аналогичных [9], теоретический анализ существования поверхностных волн, а также численный метод их нахождения. Предлагаемый подход является развитием методики работ авторов [16], [17], в которых изучалась аналогичная скалярная задача и работы [26], посвященной векторной задаче. Он основан на сведении исходной задачи к параметрической задаче на собственные значения в ограниченной области с нелинейным вхождением спектрального параметра в нелокальное краевое условие. Исследование этой задачи проводится на основе методов спектральной теории ограниченных самосопряженных операторов. Дискретизация полученной задачи проводится на основе метода конечных элементов.

Однин из методов исследования существования решений спектральных задач в неограниченных областях основан на привлечении спектральной теории неограниченных операторов. На этом пути в последнее время получен ряд интересных результатов (см., напр., [18], [19], [20]). В частности, в работе [18] изучены те же вопросы, касающиеся существования решений, которые рассматриваются в настоящей статье. Предлагаемую здесь методику можно расценивать как альтернативный подход к решению подобных задач. Он представляется более конструктивным, так как приводит к более простым с точки зрения применения численных методов уравнениям. Эта методика приводит также к новым результатам. Так, например, нам удается построить существенно более простое уравнение, определяющее количество решений задачи (уравнение отсечки). Наиболее близкой к нашей работе по методике исследования и способу построения численного метода решения является статья [25]. В ней авторы рассмотрели аналогичные нашим вопросы, но в другой математической формулировке, полученной ими (в $\mathcal{E}$-переменных), более сложной и неудобной с нашей точки зрения. Мы используем $\mathcal{H}$-переменные.

2. Постановка задачи

Приведем постановку задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов, следуя работе [18]. Спектральная теория волноводов основана на системе однородных уравнений Максвелла

$$\operatorname{Rot}\mathcal{E} = -\mu_0\,\partial\mathcal{H}/\partial t, \quad \operatorname{Rot}\mathcal{H} = \varepsilon\,\partial\mathcal{E}/\partial t, \tag{1}$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, x_3, t)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, x_3, t)$ – векторы напряженности электрического и магнитного поля с компонентами $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ соответственно (используется декартова система координат); $\varepsilon = \varepsilon_0 n^2$ – диэлектрическая проницаемость; ε_0 – диэлектрическая проницаемость свободного пространства; n – показатель преломления; μ_0 – магнитная проницаемость свободного пространства.

Диэлектрический волновод представляет собой цилиндрическую структуру с показателем преломления $n = n(x)$, не меняющимся вдоль образующей цилиндра и зависящим от поперечных координат. Пусть $\mathbf{R}^2$ – плоскость $x_3 = \text{const}$; область поперечного сечения волновода Ω_i – ограниченная область (не обязательно односвязная) на плоскости $\mathbf{R}^2$, содержащая начало координат. Относительно показателя преломления n предположим также следующее: $n = n_\infty = \text{const} > 0$ при $x \notin \Omega_i$; n – непрерывна на $\overline{\Omega_i}$; $n_+ = \max\{n(x),\ x \in \Omega_i\} > n_\infty$.

Мы будем изучать собственные волны волноводов, имеющие вид

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix}(x, x_3, t) = \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}(x)\exp(i(\omega t - \beta x_3))\right), \tag{2}$$

где β, $\omega > 0$. Подставляя векторы $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ вида (2) в уравнения Максвелла (1), получим следующую систему уравнений:

$$\operatorname{Rot}_\beta E = -i\omega\mu_0 H, \quad \operatorname{Rot}_\beta H = i\omega\varepsilon_0 n^2 E, \tag{3}$$

где

$$\operatorname{Rot}_\beta E = \begin{bmatrix} \partial E_3/\partial x_2 + i\beta E_2 \\ -i\beta E_1 - \partial E_3/\partial x_1 \\ \partial E_2/\partial x_1 - \partial E_1/\partial x_2 \end{bmatrix}.$$

Введем ряд обозначений. Для скалярного поля φ, векторных полей $\mathbf{F} = (F_1, F_2)^{\mathrm{T}}$, $F = (\mathbf{F}^{\mathrm{T}}, F_3)^{\mathrm{T}}$, и $D \subseteq \mathbf{R}^2$ примем

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \partial F_2/\partial x_1 - \partial F_1/\partial x_2, \quad \operatorname{div}\mathbf{F} = \partial F_1/\partial x_1 + \partial F_2/\partial x_2,$$

$$\nabla\varphi = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rot}\varphi = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x_2 \\ -\partial\varphi/\partial x_1 \end{bmatrix}, \quad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2},$$

$$a_D(F, F') =$$

$$= \int\limits_D \left(\frac{1}{n^2}\operatorname{rot}\mathbf{F}\,\overline{\operatorname{rot}\mathbf{F}'} + \frac{1}{n_\infty^2}\operatorname{div}\mathbf{F}\,\overline{\operatorname{div}\mathbf{F}'} + \frac{1}{n^2}\nabla F_3\cdot\overline{\nabla F_3'}\right)dx,$$

$$c_D(F, F') = i\int\limits_D \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_\infty^2}\right)\left(\mathbf{F}\cdot\overline{\nabla F_3'} - \nabla F_3\cdot\overline{\mathbf{F}'}\right)dx,$$

$$b_D(F, F') = \int\limits_D \left(\frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2}\right)\mathbf{F}\cdot\overline{\mathbf{F}'}\,dx, \quad d_D(F, F') = \int\limits_D F\cdot\overline{F'}\,dx,$$

$$\operatorname{Div}_\beta F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - i\beta F_3,$$

$$c(\beta; F, F') = \int\limits_{\mathbf{R}^2} \left(\frac{1}{n^2}\operatorname{Rot}_\beta F\cdot\overline{\operatorname{Rot}_\beta F'} + \frac{1}{n_\infty^2}\operatorname{Div}_\beta F\,\overline{\operatorname{Div}_\beta F'}\right)dx,$$

где символ "$\cdot$" означает скалярное произведение векторов.

Пусть $V = \left[W_2^1(\mathbf{R}^2)\right]^3$ – пространство Соболева комплексно-значных функций с нормой

$$\|F\|^2_{1,\mathbf{R}^2} = \int\limits_{\mathbf{R}^2} (|\nabla F|^2 + |F|^2)\, dx,$$

где $|F|^2 = F \cdot \overline{F}$. Пусть $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$.

В работе [18] доказано, что если при некоторых $(\beta, \omega) \in \mathbf{R}_+^2$ у системы уравнений (3) существует нетривиальное решение E, $H \in \left[L_2(\mathbf{R}^2)\right]^3$, то вектор H принадлежит $V \setminus \{0\}$ и является решением уравнения

$$c(\beta; H, H') = k^2 d_{\mathbf{R}^2}(H, H') \quad \forall H' \in V, \tag{4}$$

где $k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$. Верно и обратное, а именно, если $(\beta, \omega; H) \in \mathbf{R}_+^2 \times V \setminus \{0\}$ – решение задачи (4), и поле E определяется из второго уравнения (3), то E, $H \in \left[L_2(\mathbf{R}^2)\right]^3$ и удовлетворяют также первому уравнению системы (3). В этом смысле задачи (3) и (4) эквивалентны.

В работе [18] доказано, что нетривиальные решения задачи (4) могут существовать только при

$$(\beta, k) \in \Lambda = \{(\beta, k) : \beta/n_+ < k < \beta/n_\infty, \beta > 0\}.$$

Итак, задача о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов формулируется следующим образом [18]: найти все $(\beta, k) \in \Lambda$ и $H \in V \setminus \{0\}$ удовлетворяющие уравнению (4).

Получим эквивалентную формулировку задачи (4) в виде задачи в ограниченной области. Для этого нам понадобится нелокальный граничный оператор S_Γ, определяемый ниже, и его свойства.

3. Оператор S_Γ

Пусть Ω – открытый круг радиуса R, такой, что $\Omega_i \subset \Omega$; $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – единичный вектор внешней нормали к границе Γ области Ω; $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ – касательный вектор к Γ; $\Omega_\infty = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. Введем пространства комплексно-значных функций $V_\Omega = \left[W_2^1(\Omega)\right]^3$, $V_\infty = \left[W_2^1(\Omega_\infty)\right]^3$, $V_\infty^0 = \{H \in V_\infty : H|_\Gamma = 0\}$, и пусть $(\cdot, \cdot)$ –

скалярное произведение в V_Ω:

$$\left(H, H'\right) = \int\limits_{\Omega} \left(\nabla H \cdot \nabla \overline{H'} + H \cdot \overline{H'}\right) dx\,.$$

Пусть $\sigma^2 = \beta^2 - k^2 n_\infty^2 > 0$. Вектор $H_\sigma \in V_\infty$ назовем метагармоническим продолжением вектора $H \in \left[W_2^{1/2}(\Gamma)\right]^3$ в область Ω_∞, если $H_\sigma\big|_\Gamma = H$, и

$$s_{\Omega_\infty}(\sigma; H_\sigma, H') = 0 \quad \forall H' \in V_\infty^0,$$

где

$$s_{\Omega_\infty}(\sigma, H, H') = a_{\Omega_\infty}(H, H') + \frac{\beta^2}{n_\infty^2} d_{\Omega_\infty}(H, H') -$$
$$-k^2 d_{\Omega_\infty}(H, H') = \int\limits_{\Omega_\infty} \frac{1}{n_\infty^2} \Big(\text{rot } \mathbf{H}\, \overline{\text{rot } \mathbf{H}'} +$$
$$+ \text{div } \mathbf{H}\, \overline{\text{div } \mathbf{H}'} + \nabla H_3 \cdot \overline{\nabla H_3'} + \sigma^2 H \cdot \overline{H'}\Big)\, dx. \qquad (5)$$

С помощью формулы интегрирования по частям нетрудно показать, что метагармоническое продолжение удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega_\infty} (\nabla H_\sigma \cdot \overline{\nabla H'} + \sigma^2 H_\sigma \cdot \overline{H'})\, dx = 0 \quad \forall H' \in V_\infty^0. \qquad (6)$$

Следовательно, указанное продолжение существует, определяется единственным образом и, кроме того [21],

$$\int\limits_{\Omega_\infty} \left(|\nabla H_\sigma|^2 + \sigma^2 |H_\sigma|^2\right) dx =$$
$$= \inf_{H' \in V_\infty,\ H'|_\Gamma = H} \int\limits_{\Omega_\infty} \left(|\nabla H'|^2 + \sigma^2 |H'|^2\right) dx. \qquad (7)$$

Определим оператор $S_\Gamma(\sigma) : V_\Omega \to V_\Omega$ по формуле

$$\left(S_\Gamma(\sigma) H, H'\right) = s_{\Omega_\infty}(\sigma; H_\sigma, H'_\sigma), \qquad (8)$$

где H, H' – произвольные элементы V_Ω, H_σ, H'_σ – метагармонические продолжения в область Ω_∞ следов векторов H и H' на Г. Изучим свойства оператора $S_\Gamma(\sigma)$.

Лемма 1 . *Для любого* $\sigma > 0$ *справедливо* $S_\Gamma(\sigma) = S^*_\Gamma(\sigma) \geq 0$.[2]

Доказательство. Поскольку для любого $\sigma > 0$ форма $s_{\Omega_\infty}(\sigma;\cdot,\cdot)$ эрмитова на $V_\infty \times V_\infty$ и неотрицательна, то достаточно доказать ограниченность оператора S_Γ. Воспользуемся следующими эквивалентными нормировками пространства $[W_2^{1/2}(\Gamma)]^3$ (см., напр., [21, с.55]):

$$\|H\|_{1/2,\Gamma} = \inf_{H' \in V_\Omega,\ H'|_\Gamma = H} \|H'\|_{1,\Omega},$$

$$\|H\|_{1/2,\Gamma} = \inf_{H' \in V_\infty,\ H'|_\Gamma = H} \|H'\|_{1,\Omega_\infty}.$$

Учитывая (5) и (7), нетрудно видеть, что

$$(S_\Gamma(\sigma)H, H) \leq c \int\limits_{\Omega_\infty} (|\nabla H_\sigma|^2 + \sigma^2 |H_\sigma|^2)\, dx =$$

$$= c \inf_{H' \in V_\infty,\ H'|_\Gamma = H} \int\limits_{\Omega_\infty} \left(|\nabla H'|^2 + \sigma^2 |H'|^2\right) dx \leq$$

$$\leq c_\sigma \inf_{H' \in V_\infty,\ H'|_\Gamma = H} \|H'\|^2_{1,\Omega_\infty} = c_\sigma \|H\|^2_{1/2,\Gamma} \leq c_\sigma \|H\|^2_{1,\Omega}.$$

Лемма доказана.

Поскольку оператор S_Γ непрерывен, а пространство $[C^\infty(\Omega)]^3$ плотно в V_Ω, то достаточно определить S_Γ лишь на функциях из $[C^\infty(\Omega)]^3$. Интегрированием по частям в формуле (8) получим

$$(S_\Gamma(\sigma)H, H') = \int\limits_{\Omega_\infty} \frac{1}{n_\infty^2}(-\Delta H_\sigma + \sigma^2 H_\sigma) \cdot \overline{H'_\sigma}\, dx -$$

$$- \int\limits_\Gamma \frac{1}{n_\infty^2} \frac{\partial H_\sigma}{\partial \nu} \cdot \overline{H'}\, dx + \int\limits_\Gamma \frac{1}{n_\infty^2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \tau} \overline{H'_2} + H_2 \frac{\partial \overline{H'_1}}{\partial \tau} \right) dx. \tag{9}$$

[2]Т.е. $S_\Gamma(\sigma)$ является самосопряженным и неотрицательно определенным оператором.

Методом разделения переменных получим решение уравнения (6):

$$H_\sigma(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_n(\sigma r)}{K_n(\sigma R)}\, a_n(H)\, e^{in\varphi},$$

$$a_n(H) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} H(R,\varphi)\, e^{-in\varphi}\, d\varphi. \tag{10}$$

Здесь (r,φ) полярные координаты точки x, $K_n(z)$ – модифицированная функция Бесселя порядка n (см., напр., [22]). С учетом (6) и (10), из (9) получим

$$(S_\Gamma(\sigma)H, H') = \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(\sigma R)\, a_n(H) \cdot \overline{a_n(H')} +$$

$$+\frac{2\pi i}{n_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left(a_n(H_1)\, \overline{a_n(H_2')} - a_n(H_2)\, \overline{a_n(H_1')} \right),$$

где $A_n(z) = -zK_n'(z)/K_n(z)$.

Известно, что модифицированные функции Бесселя $K_n(z)$ положительны при вещественных $z > 0$, $n \geq 0$, а также, что

$$K_n(z) = K_{-n}(z), \quad K_n'(z) = -K_{n-1}(z) - \frac{n}{z} K_n(z), \quad n \geq 1,$$

$$K_n'(z) = -K_{n+1}(z) + \frac{n}{z} K_n(z), \quad n \leq -1, \quad K_0'(z) = -K_1(z).$$

Отсюда следует, что

$$A_n(z) = |n| + zK_{|n|-1}(z)/K_{|n|}(z) > 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Определим операторы $S(\sigma)$, $S_0 : V_\Omega \to V_\Omega$ по формулам

$$(S(\sigma)H, H') = \frac{2\pi\sigma R}{n_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_{|n|-1}(\sigma R)}{K_{|n|}(\sigma R)}\, a_n(H) \cdot \overline{a_n(H')}, \quad \sigma > 0, \tag{11}$$

$$(S_0 H, H') = \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| a_n(H) \cdot \overline{a_n(H')} +$$

$$+\frac{2\pi i}{n_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \big(a_n(H_1) \cdot \overline{a_n(H_2')} - a_n(H_2) \cdot \overline{a_n(H_1')} \big).$$

Оператор $S_\Gamma(\sigma)$ – сумма этих двух операторов:

$$S_\Gamma(\sigma) = S(\sigma) + S_0 \quad \forall\sigma > 0. \tag{12}$$

Лемма 2 . *Для любого $\sigma > 0$ оператор $S(\sigma)$ – компактный; $S(\sigma) = S^*(\sigma) \geq 0$; $\|S(\sigma)\| \to 0$ при $\sigma \to 0$; оператор-функция $S(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой по $\sigma > 0$, а функция $\sigma \to (S(\sigma)H, H)$ – неубывающей по $\sigma > 0$ при любом фиксированном $H \in V_\Omega$. $S_0 = S_0^* \geq 0$.*

Доказательство. Симметрия и неотрицательность $S(\sigma)$ очевидны. Докажем его компактность. В силу свойств функций Бесселя, функции $K_{|n|-1}(z)/K_{|n|}(z)$, $n \neq 0$, являются непрерывными монотонно возрастающими от нуля до единицы на $[0, \infty)$, функция $A_0(z) = zK_1(z)/K_0(z)$ также является непрерывной монотонно возрастающей от нуля на $[0, \infty)$. Пусть

$$c_1(\sigma) = 2\pi \max\{R\sigma, A_0(R\sigma)\}/n_\infty^2.$$

В силу равенства Парсеваля

$$(S(\sigma)H, H) \leq c_1(\sigma) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(H)|^2 = c_1(\sigma)\|H\|^2_{[L_2(\Gamma)]^3}.$$

Поскольку вложение $V_\Omega \subset [L_2(\Gamma)]^3$ компактно и $\|H\|_{[L_2(\Gamma)]^3} \leq c_\Gamma\|H\|_{1,\Omega}$ для любого $H \in V_\Omega$, то отсюда следует компактность $S(\sigma)$ и оценка

$$\|S(\sigma)\| \leq c_\Gamma^2 c_1(\sigma).$$

Отметим, что на $[0, \infty)$ функция $c_1(\sigma)$ непрерывна и в нуле ведет себя, как $-1/\ln(R\sigma)$. Таким образом, $\|S(\sigma)\| \to 0$ при $\sigma \to 0$.

Нетрудно видеть, что ряд (11) при любых H, $H' \in V_\Omega$ можно почленно дифференцировать по $\sigma > 0$. Следовательно, оператор-функция $S(\sigma)$ является непрерывно дифференцируемой по $\sigma > 0$. Докажем монотонность $S(\sigma)$. При этом нам будет удобно нормировать пространство $[W_2^{1/2}(\Gamma)]^3$ следующим образом:

$$\|H\|^2_{1/2,\Gamma} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n| + 1)|a_n(H)|^2.$$

Известно (см., напр., [23, с.29]), что существует не зависящая от H постоянная $c_{1/2}$ такая, что

$$\|H\|_{1/2,\Gamma} \le c_{1/2}\|H\|_{1,\Omega} \ \forall H \in V_\Omega.$$

Простые вычисления показывают, что при $z > 0$ и $n \neq 0$

$$0 < A_n'(z) = \frac{A_n^2(z) - z^2 - n^2}{z} \le 2|n| \le 2(|n|+1), \ \ A_0'(z) > 0.$$

Полагая $c_2(\sigma) = 2\pi \max\{2, A_0'(R\sigma)\}/n_\infty^2$, имеем

$$0 \le \frac{d}{d\sigma}(S(\sigma)H, H) = \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n'(R\sigma)|a_n(H)|^2 \le$$

$$\le c_2(\sigma) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|+1)|a_n(H)|^2 = c_2(\sigma)\|H\|_{1/2,\Gamma}^2 \le c_{1/2}^2 c_2(\sigma)\|H\|_{1,\Omega}^2.$$

Функция $c_2(\sigma)$ непрерывно зависит от σ при $\sigma > 0$ и имеет особенность порядка $-(\sigma \ln \sigma)^{-1}$ при $\sigma \to 0$. Итак, функция $\sigma \to (S(\sigma)H, H)$ является неубывающей по $\sigma > 0$ при любом фиксированном $H \in V_\Omega$.

Самосопряженность S_0 очевидна. Проверим его неотрицательность. Пусть $a_{n,i} = a_n(H_i)$, $a'_{n,i} = \mathrm{Re}\, a_{n,i}$, $a''_{n,i} = \mathrm{Im}\, a_{n,i}$. Тогда

$$(S_0 H, H) =$$

$$= \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{n\neq 0} |n| \left(|a_{n,3}|^2 + \left(a''_{n,1} - \frac{|n|}{n} a'_{n,2}\right)^2 + \left(a'_{n,1} + \frac{|n|}{n} a''_{n,2}\right)^2 \right) \ge 0$$

для любого $H \in V_\Omega$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что оператор-функцию $S(\sigma)$ можно продолжить по непрерывности на полуось $[0, \infty)$, достаточно положить $S(0) = 0$. Полученное продолжение непрерывно: $\|S(\sigma) - S(\eta)\| \to 0$ при $\sigma \to \eta$; σ, $\eta \in [0, \infty)$. Далее, говоря об операторе $S(\sigma)$ при $\sigma \in [0, \infty)$, мы всегда будем иметь в виду указанное продолжение.

4. Задача в ограниченной области

Сведем задачу (4) к задаче в круге Ω. В задаче (4) числовыми неизвестными являются параметры β и k. Однако нам будет удобно в качестве спектрального параметра использовать $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}$ и искать (β, σ) вместо (β, k).

Определим для всех пар $(\beta, k) \in \Lambda$, операторы $A_0, B_0, C, B : V_\Omega \to V_\Omega$ посредством следующих тождеств:

$$(A_0 H, H') = a_\Omega(H, H'), \quad (B_0 H, H') = b_\Omega(H, H'),$$

$$(CH, H') = c_\Omega(H, H'), \quad (BH, H') = d_\Omega(H, H'),$$

где H, H' – произвольные функции из V_Ω. Пусть $A = A_0 + S_0$.

Рассмотрим задачу: найти все $(\beta, \sigma) \in \mathbf{R}_+^2$ и $H \in V_\Omega \setminus \{0\}$, удовлетворяющие уравнению

$$\left(A + \beta C - \beta^2 B_0 + S(\sigma)\right) H = -(\sigma^2 / n_\infty^2) BH. \tag{13}$$

Теорема 1 . *Пусть $(\beta, k; H^*) \in \Lambda \times V \setminus \{0\}$ – решение задачи (4), H – сужение H^* на область Ω, $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k^2 n_\infty^2}$. Тогда $(\beta, \sigma; H)$ – решение задачи (13). Обратно, пусть $(\beta, \sigma; H) \in \mathbf{R}_+^2 \times V_\Omega \setminus \{0\}$ – решение задачи (13), вектор H^* в области Ω совпадает с H и в области Ω_∞ равен метагармоническому продолжению H_σ вектора $H|_\Gamma$. Тогда*

$$\sigma < \sqrt{1 - (n_\infty / n_+)^2}\,\beta, \tag{14}$$

и тройка $(\beta, k; H^*)$, где $k = \sqrt{\beta^2 - \sigma^2} / n_\infty$, – решение задачи (4).

Доказательство. Пусть $(\beta, k; H^*) \in \Lambda \times V \setminus \{0\}$ – решение задачи (4). Для всех H, $H' \in V$ верны равенства $c_{\Omega_\infty}(H, H') = 0$, $b_{\Omega_\infty}(H, H') = 0$,

$$c(\beta; H, H') = a_{\mathbb{R}^2}(H, H') + \beta c_{\mathbb{R}^2}(H, H') -$$

$$-\beta^2 b_{\mathbb{R}^2}(H, H') + \frac{\beta^2}{n_\infty^2} d_{\mathbb{R}^2}(H, H').$$

Тождество (4) представим в виде

$$\begin{aligned} a_\Omega(H, H') + \beta c_\Omega(H, H') - \beta^2 b_\Omega(H, H') + \\ +(\beta^2 / n_\infty^2) d_\Omega(H, H') + s_{\Omega_\infty}(\sigma; H, H') = \\ = k^2 d_\Omega(H, H') \quad \forall H' \in V. \end{aligned} \tag{15}$$

Полагая $H' = 0$ в области Ω, получим, что решение задачи (4) равно H_σ в области Ω_∞. Ограничиваясь в тождестве (15) только такими $H' \in V$, что $H' = H'_\sigma$ в Ω_∞, получим, что если решение задачи (4) существует, то оно удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} a_\Omega(H, H') + \beta c_\Omega(H, H') - \beta^2 b_\Omega(H, H') + \\ +(\beta^2/n_\infty^2) d_\Omega(H, H') + \left(S_\Gamma(\sigma)H, H'\right) = \\ = k^2 d_\Omega(H, H') \quad \forall H' \in V_\Omega. \end{aligned} \tag{16}$$

Запишем тождество (16) в операторном виде

$$(A_0 + \beta C - \beta^2 B_0 + S_\Gamma(\sigma) + (\beta^2/n_\infty^2)B)H = k^2 BH. \tag{17}$$

Подставляя (12) в (17), получим (13).

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $(\beta, \sigma; H) \in \mathbf{R}_+^2 \times V_\Omega \setminus \{0\}$ – решение задачи (13). Определим параметр k равенством $k = \sqrt{\beta^2 - \sigma^2}/n_\infty$. Тогда (13) равносильно уравнению (17), и, следовательно, уравнению (16). Определим по $H|_\Gamma$ метагармоническое продолжение H_σ. Вектор, совпадающий в области Ω с H, и в области Ω_∞ равный H_σ, обозначим через H^*. Очевидно, $H^* \in V \setminus \{0\}$. Пользуясь определением оператора $S_\Gamma(\sigma)$, и замечая, что в силу определения метагармонического продолжения $s_{\Omega_\infty}(\sigma; H^*, H'_\sigma) = s_{\Omega_\infty}(\sigma; H^*, H')$, получаем, что H^* удовлетворяет (15) и (4). Итак, тройка $(\beta, k; H^*)$ – решение задачи (4). Следовательно, число k – вещественное, $k > \beta/n_+$, и справедливо (14). Теорема доказана.

Замечание 1 . *Из теоремы 1 следует, что если решение $(\beta, \sigma; H)$ задачи (13) существует, то (β, σ) принадлежат множеству*

$$K = \left\{(\beta, \sigma) : \beta > 0,\ 0 < \sigma < \sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2}\beta\right\}.$$

Пусть $M(\beta) = (1/\beta)A + C - \beta B_0$, $G(\beta, \sigma) = M(\beta) + (1/\beta)S(\sigma)$. Запишем задачу (13) в виде

$$(\beta, \sigma; H) \in \mathbf{R}_+^2 \times V_\Omega \setminus \{0\} : \quad G(\beta, \sigma)H = -(\sigma^2/(\beta n_\infty^2))BH,$$

и сформулируем ее так: найти все решения $(\beta, \sigma) \in \mathbf{R}_+^2$ уравнения

$$\gamma(\beta, \sigma) = -\sigma^2/(\beta n_\infty^2),$$

где $\gamma(\beta, \sigma)$ – собственные значения линейной спектральной задачи

$$(\gamma, H) \in \mathbf{R} \times V_\Omega \setminus \{0\} : \quad G(\beta, \sigma)H = \gamma(\beta, \sigma)BH. \qquad (18)$$

Найденные (β, σ) и собственные векторы H, отвечающие собственным значениям $\gamma(\beta, \sigma)$ при этих (β, σ), будут решениями задачи (13).

Лемма 3 . *Для любых $\beta > 0$, $\sigma \geq 0$ оператор $G(\beta, \sigma)$ – самосопряженный, B – компактный, $B = B^* > 0$, и*

$$M(\beta) + \lambda\beta B \geq 1/(2\beta)A \geq 0, \qquad (19)$$

где $\lambda = \delta + 2\delta^2 n_\infty^2$, $\delta = \max\limits_{x \in \Omega} \left|1/n_\infty^2 - 1/n^2\right|$.

Доказательство. Очевидно, что для любого $\beta > 0$ оператор $M(\beta)$ – самосопряженный. Для любого $\sigma \geq 0$ оператор $S(\sigma)$ – самосопряженный в силу леммы 2. Следовательно, первое утверждение леммы справедливо. Утверждения относительно оператора B очевидны. Докажем справедливость неравенства (19). Легко проверить, что

$$|(CH, H)| \leq 2\delta\Big(\int\limits_\Omega |\nabla H_3|^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_\Omega |\mathbf{H}|^2 dx\Big)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n_\infty^2\beta}\int\limits_\Omega |\nabla H_3|^2 dx + 2n_\infty^2\beta\delta^2(BH, H),$$

$$(B_0 H, H) \leq \delta(BH, H),$$

$$(AH, H) \geq \frac{1}{2}(AH, H) + \frac{1}{2n_\infty^2}\int\limits_\Omega |\nabla H_3|^2 dx,$$

где H – произвольная функция из V_Ω. Следовательно,

$$((M(\beta) + \lambda\beta B)H, H) = (((1/\beta)A + C - \beta B_0 + \lambda\beta B)H, H) \geq$$

$$\geq 1/(2\beta)(AH, H) + (\lambda - \delta - 2n_\infty^2\delta^2)\beta(BH, H) =$$

$$= 1/(2\beta)(AH, H) \geq 0.$$

Лемма доказана.

Задача (18) в силу леммы 3 для любых фиксированных $\beta > 0$, $\sigma \geq 0$ имеет счетное множество решений (γ_k, H_k). Собственные функции H_k выберем ортонормированными,

$$(BH_k, H_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \ldots .$$

Пронумеруем γ_k по возрастанию (с учетом кратности),

$$-\lambda\beta \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \cdots \leq \gamma_n \leq \cdots, \quad \gamma_n \to \infty.$$

По теореме Рисса-Фишера, для $k = 1, 2, \ldots$

$$\gamma_k(\beta, \sigma) = \inf_{V_k \subset V_\Omega} \sup_{H \in V_k} R(\beta, \sigma; H), \quad R(\beta, \sigma; H) = \frac{(A(\beta, \sigma)H, H)}{(BH, H)}, \tag{20}$$

где нижняя грань берется по всем k-мерным подпространствам пространства V_Ω.

Лемма 4 . *Равенство $(AH, H) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $H = \mathrm{const}$ в Ω.*

Доказательство. Пусть $H = \mathrm{const}$ в Ω. Тогда, очевидно, справедливо равенство $(AH, H) = 0$. Наоборот, из последнего равенства и леммы 2 следует, что $(S_0 H, H) = 0$, и

$$I \equiv \frac{1}{n_\infty^2} \int_\Omega \left(|\mathrm{rot}\, \mathbf{H}|^2 + |\mathrm{div}\, \mathbf{H}|^2 + |\nabla H_3|^2 \right) dx = 0.$$

Отсюда интегрированием по частям легко получить, что

$$0 = I + (S_0 H, H) = \frac{1}{n_\infty^2} \int_\Omega |\nabla H|^2 \, dx + \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \, |a_n(H)|^2 .$$

Следовательно, $H = \mathrm{const}$ в Ω. Лемма доказана.

Лемма 5 . *Каждая функция $\gamma_k(\beta, \sigma)$, $k = 1, 2, \ldots$, при любом фиксированном $\sigma \geq 0$ является непрерывной невозрастающей функцией $\beta > 0$, а при любом фиксированном $\beta > 0$ – непрерывной неубывающей функцией $\sigma \geq 0$. Кроме того, для любого $\sigma \geq 0$ справедливы оценки*

$$\lim_{\beta \to \infty} (\gamma_k(\beta, \sigma)/\beta) \leq 1/n_+^2 - 1/n_\infty^2 < 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{21}$$

Доказательство. Все утверждения леммы, кроме оценок (21), непосредственно следуют из определения (20) функций γ_k, неотрицательности операторов A, B_0 и леммы 2. Докажем справедливость неравенств (21). Пусть η – произвольное положительное число. В силу свойств функции n существует такая точка $x_0 \in \Omega$ и такое число ρ, что

$$\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\Omega_\rho}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_+^2}\right)dx \le \eta,$$

где $\Omega_\rho = \{x \in \Omega : \ |x-x_0| < \rho\}$. Обозначим через $\mu_\rho^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, первые m собственных чисел оператора Лапласа в области Ω_ρ при граничном условии Дирихле, а через $w_\rho^{(k)}$ – соответствующие им собственные функции, продолженные нулем вне Ω_ρ и удовлетворяющие условиям $\|w_\rho^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Положим

$$H_\rho^{(2k-1)} = \left(w_\rho^{(k)}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad H_\rho^{(2k)} = \left(0, w_\rho^{(k)}, 0\right)^{\mathrm{T}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Обозначим через $\widetilde{W}_\rho$ – m-мерное подпространство $W_2^1(\Omega)$, натянутое на $w_\rho^{(1)}$, ..., $w_\rho^{(m)}$, а через W_ρ – $2m$-мерное подпространство V_Ω, натянутое на $H_\rho^{(1)}, \ldots, H_\rho^{(2m)}$. Для любого вектора $H \in W_\rho$ имеем

$$(S_0 H, H) = 0, \ (S(\sigma)H, H) = 0, \ (CH, H) = 0,$$

$$(A_0 H, H) \le \frac{1}{n_\infty^2}\int\limits_\Omega |\nabla H|^2\,dx,$$

$$-(B_0 H, H) = \int\limits_\Omega\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_+^2}\right)|H|^2\,dx + \left(\frac{1}{n_+^2}-\frac{1}{n_\infty^2}\right).$$

Таким образом,

$$\gamma_{2m}/\beta - (1/n_+^2 - 1/n_\infty^2) \le \alpha_m(\beta, \rho), \tag{22}$$

где

$$0 \le \alpha_m(\beta,\rho) =$$

$$= \sup_{H \in W_\rho}\left(\frac{1}{n_\infty^2\beta^2}\int\limits_\Omega |\nabla H|^2\,dx + \int\limits_\Omega\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_+^2}\right)|H|^2\,dx\right) \le$$

$$\leq \frac{\mu_\rho^{(m)}}{n_\infty^2 \beta^2} + \eta \rho^2 \sup_{v \in \widetilde{W}_\rho,\, \|v\|_{L_2(\Omega)}=1} \|v\|^2_{L_\infty(\Omega_\rho)}.$$

Хорошо известно, что

$$\mu_\rho^{(l)} = \mu_1^{(l)}/\rho^2, \quad \|w_\rho^{(l)}\|_{L_\infty(\Omega_\rho)} = \|w_1^{(l)}\|_{L_\infty(\Omega_1)}/\rho, \quad l = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, для любого $\beta > 1/(\rho\sqrt{\eta})$ верна оценка

$$\alpha_m(\beta, \rho) \leq c_m \eta,$$

где константа c_m не зависит от ρ, η, β. Переходя в последнем неравенстве и в неравенстве (22) к пределу по $\eta \to 0$, $\beta \to \infty$, получаем неравенство (21) для любого четного k. Но так как $\gamma_{2m-1} \leq \gamma_{2m}$, то это неравенство справедливо и для всех целых k. Лемма доказана.

5. Разрешимость задачи

Исходная задача (4), согласно теореме 1, эквивалентна задаче (13). Для того, чтобы решить задачу (13) при фиксированном $\beta > 0$, необходимо определить все решения $\sigma \geq 0$ уравнений

$$\gamma_k(\beta, \sigma) = -\sigma^2/(\beta n_\infty^2), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где функции $\gamma_k(\beta, \sigma)$ определены равенствами (20). Так как функции $\gamma_k(\beta, \sigma)$ при фиксированном $\beta > 0$ непрерывны и не убывают по $\sigma \geq 0$ (см. лемму 5), то число уравнений (23), имеющих решение,

$$n(\beta) = \max\{k : \gamma_k(\beta, 0) < 0\}, \quad \beta > 0, \tag{24}$$

где $\gamma_k(\beta, 0)$ – собственные значения задачи (18) при $\sigma = 0$. Представление о поведении функций $\sigma \to \gamma_k(\beta, \sigma)$ дает рис. 1, основанный на их свойствах, доказанных в лемме 5.

Если при некотором $k = 1, 2, \ldots$ и $\beta > 0$ решение уравнения (23) существует, то оно, очевидно, единственно. Обозначим его через $\sigma_k(\beta)$. Итак, при фиксированном $\beta > 0$ задача (13) имеет $n(\beta)$ решений $(\beta, \sigma_k(\beta))$, причем

$$0 < \sigma_{n(\beta)}(\beta) \leq \sigma_{n(\beta)-1}(\beta) \leq \ldots \leq \sigma_1(\beta) < \beta\sqrt{1 - (n_\infty/n_+)^2}.$$

Последняя оценка здесь следует из теоремы 1.

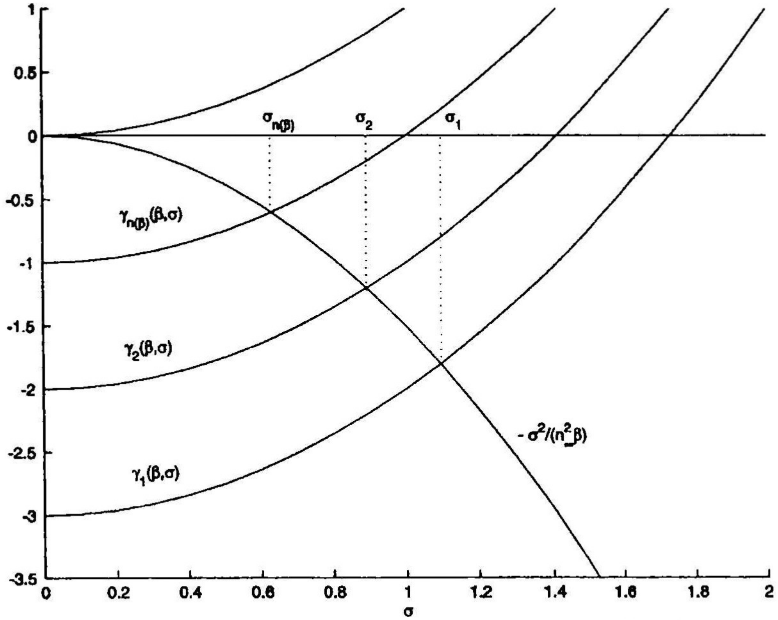

Рис.1. Типичное поведение функций $\sigma \to \gamma_k(\beta, \sigma)$.

Дадим более удобный способ определения числа $n(\beta)$. Пусть $H_3^* = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ при $x \in \Omega$,

$$V_0 = \left\{ H \in V_\Omega : \ (BH, H_3^*) = \int\limits_\Omega H_3 \, dx = 0 \right\}.$$

Рассмотрим задачу

$$(\beta, H) \in \overline{R}_+ \times V_0 \setminus \{0\} : \quad \left(A + \beta C - \beta^2 B_0\right) H = 0, \tag{25}$$

Теорема 2 . *Задача (25) имеет счетное множество решений* $\{\beta_k^0\}_{k=1}^\infty$,

$$0 = \beta_1^0 = \beta_2^0 < \beta_3^0 \le \dots \le \beta_k^0 \le \dots, \quad \beta_k^0 \to \infty, \ k \to \infty. \tag{26}$$

Число решений задачи (13) при фиксированном $\beta > 0$ *равно*

$$n(\beta) = \max\{k : \ \beta_k^0 < \beta, \ k = 1, 2, \dots\}. \tag{27}$$

Доказательство. Согласно (24), количество решений задачи (13) равно числу отрицательных собственных значений $\gamma_k(\beta, 0)$. Так как при любом $\beta > 0$ справедливо равенство $M(\beta)H_3^* = 0$, то среди этих собственных значений есть нулевое. Исключим его, потребовав, чтобы собственные векторы H задачи (18) при $\sigma = 0$ принадлежали пространству V_0. Тогда собственные значения $\gamma_k(\beta, 0)$ будут, согласно (20), определяться равенствами

$$\gamma_k(\beta,0) = \inf_{V_k \subset V_0} \sup_{H \in V_k} R(\beta, H), \quad R(\beta, H) = \frac{(M(\beta)H, H)}{(BH, H)},$$

где нижняя грань берется по всем k-мерным подпространствам пространства V_0. Все функции $\gamma_k(\beta, 0)$ непрерывны при $\beta > 0$ и монотонно убывают. Действительно, для $H \in V_0$

$$\frac{dR(\beta, H)}{d\beta} = -\frac{(1/\beta^2)(AH, H) + (B_0 H, H)}{(BH, H)} < 0.$$

Как было доказано в лемме 5,

$$\lim_{\beta \to \infty} \gamma_k(\beta, 0) = -\infty, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{28}$$

Изучим поведение функций $\gamma_k(\beta, 0)$ при $\beta \to 0$. Пусть $H_1^* = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $H_2^* = (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ при $x \in \Omega$, V_2 – линейная оболочка множества $\{H_1^*, H_2^*\}$. Для любого вектора $H = c_1 H_1^* + c_2 H_2^* \in V_2$ имеем:

$$AH = 0, \quad CH = 0, \quad (BH, H) = |\Omega|(|c_1|^2 + |c_2|^2),$$
$$(B_0 H, H) = (|c_1|^2 + |c_2|^2) \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2}\right) dx.$$

Следовательно,

$$\gamma_2(\beta, 0) \le \sup_{H \in V_2} R(\beta, H) = -\frac{\beta}{|\Omega|} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2}\right) dx. \tag{29}$$

Далее, из леммы 3 для любого $\beta > 0$ следует неравенство

$$R(\beta, H) \ge \frac{1}{(2\beta)} \frac{(AH, H)}{(BH, H)} - \lambda\beta, \tag{30}$$

где H – произвольный вектор из V_0, а параметр $\lambda > 0$ определен в условии леммы 3. В частности, $R(\beta, H) \geq -\lambda\beta$. Отсюда следует, что

$$\gamma_1(\beta, 0) = \inf_{H \in V_0} R(\beta, H) \geq -\lambda\beta. \tag{31}$$

Объединяя неравенства (29) и (31), для любого $\beta > 0$ получаем

$$-\lambda\beta \leq \gamma_1(\beta, 0) \leq \gamma_2(\beta, 0) \leq -c\beta,$$

где константа $c > 0$ не зависит от β. Таким образом, функции $\gamma_1(\beta, 0)$ и $\gamma_2(\beta, 0)$ можно продолжить по непрерывности при $\beta = 0$, и положить

$$\gamma_1(0, 0) = \gamma_2(0, 0) = 0. \tag{32}$$

Из (30) следует неравенство

$$\gamma_3(\beta, 0) \geq \frac{1}{2\beta}\gamma_* - \lambda\beta, \quad \gamma_* = \inf_{V_3 \subset V_0} \sup_{H \in V_3} \frac{(AH, H)}{(BH, H)},$$

где нижняя грань берется по всем 3-мерным подпространствам пространства V_0. В силу леммы 4, очевидно, $\gamma_* > 0$. Следовательно,

$$\lim_{\beta \to 0} \gamma_3(\beta, 0) = +\infty.$$

Для любого $\beta > 0$, $k = 4, 5, \ldots$, функции $\gamma_k(\beta, 0) \geq \gamma_3(\beta, 0)$, следовательно

$$\lim_{\beta \to 0} \gamma_k(\beta, 0) = +\infty, \quad k = 3, 4, \ldots. \tag{33}$$

Итак, мы показали, что функции $\gamma_k(\beta, 0)$, $k = 1, 2, \ldots$, непрерывны, монотонно убывают при $\beta > 0$, и справедливы равенства (28), (32), (33). Следовательно, каждое уравнение

$$\gamma_k(\beta, 0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

имеет единственный корень $\beta_k^0 \in [0, \infty)$ (см. рис. 2, который основан на доказанных выше свойствах функций $\gamma_k(\beta, 0)$ и показывает их поведение).

Таким образом, мы можем определить число решений задачи (13) равенством (27), где β_k^0 – корни уравнений (34). Множество чисел β_k^0 счетно, они удовлетворяют условию (26).

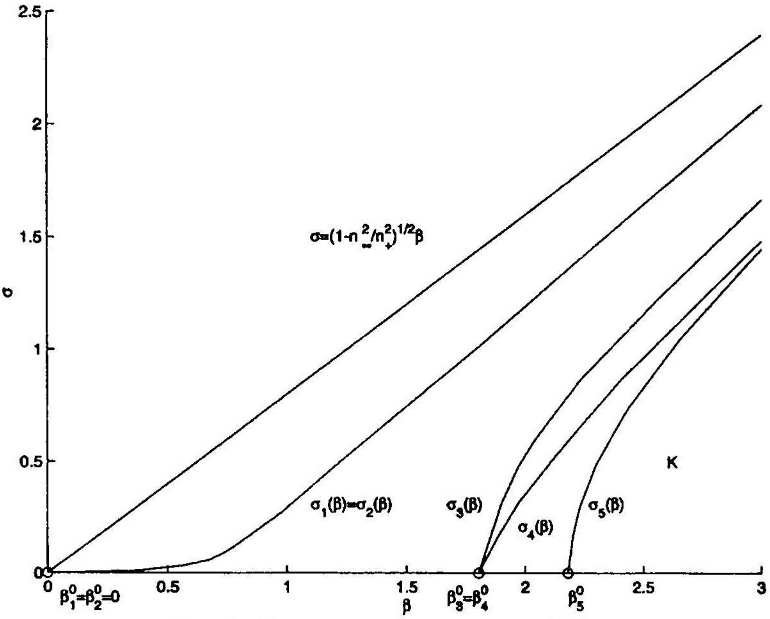

Рис.2. Число решений задачи (13)

Покажем теперь, что числа β_k^0 и только они являются решениями задачи (25). Пусть $H_k(\beta_k^0) \in V_0$ – собственный вектор задачи (18) при $\sigma = 0$, отвечающий собственному значению $\gamma_k(\beta_k^0, 0)$. Рассматривая (18) при $\sigma = 0$, $\beta = \beta_k^0$ и $H = H_k(\beta_k^0)$, получаем, что пара $(\beta_k^0, H_k(\beta_k^0))$ – решение задачи (25). Обратно, пусть (β_*, H_*) – решение задачи (25), и $\beta_* > 0$. Это означает, что $A(\beta_*)H_* = 0$, то есть задача (18) при $\sigma = 0$ и $\beta = \beta_*$ имеет нулевое собственное значение, или $\gamma_k(\beta_*, 0) = 0$ при некотором k. В силу единственности корней уравнений (34), получаем $\beta_* = \beta_k^0$, и пара $(\gamma_k(\beta_*, 0), H_*)$ – решение задачи (18) при $\sigma = 0$. При $\beta = 0$ задача (25) имеет только две линейно независимые собственные функции $H_1 = c_1 H_1^*$, $H_2 = c_2 H_2^*$, где c_1, c_2 – произвольные комплексные числа, следовательно, $(0, H_1)$, $(0, H_2)$ – решения при $\sigma = 0$, $\beta = 0$ задачи, которая получается умножением левой и правой частей уравнения (18) на β. Теорема доказана.

Замечание 2 . *Из теоремы 2 следует, что задача (13) (а, следовательно, задача (4)) при любом $\beta > 0$ имеет по крайней мере* *два решения. Число всех решений увеличивается с ростом β и стремится к бесконечности при $\beta \to \infty$. Для каждого конечного значения β существует не более конечного числа решений. Это число равно $n(\beta)$ и определяется значениями $\beta = \beta_k^0$, которые называются точками отсечки и являются решениями уравнения (25). Это уравнение называется уравнением отсечки.*

Дадим более удобный способ определения точек отсечки. Сведем задачу (25) к задаче на собственные значения с линейным вхождением спектрального параметра. Для этого определим оператор $C_0 : V_\Omega \to V_\Omega$ по правилу

$$(C_0 H, H) = a_0(H_3)\overline{a_0(H_3)},$$

где $a_0(H_3)$ – нулевой коэффициент Фурье (10) функции H_3. Очевидно, C_0 – самосопряженный неотрицательный оператор. Рассмотрим задачу: найти такие $\beta \geq 0$, $H \in V_\Omega \setminus \{0\}$, что выполняется равенство

$$\left(A + C_0 + \beta C - \beta^2 B_0\right) H = 0. \tag{35}$$

Нетрудно проверить, что задачи (25) и (35) имеют одно и то же множество решений β_k^0. Действительно, пусть (β, H) – решение задачи (25). Представим вектор H в виде $H = cH_3^* + H^0$, где $H_3^* = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$ в области Ω, $c = a_0(H_3)$. Тогда, очевидно, $C_0 H^0 = 0$. Учитывая это равенство и то, что вектор H_3^* при любом $\beta \geq 0$ принадлежит ядру оператора $A + \beta C - \beta^2 B_0$, получаем цепочку равенств:

$$0 = (A + \beta C - \beta^2 B_0)H = (A + \beta C - \beta^2 B_0)H^0 =$$

$$= (A + C_0 + \beta C - \beta^2 B_0)H^0,$$

то есть (β, H^0) – решение задачи (35). Пусть теперь (β, H) – собственная пара задачи (35). Умножая обе части равенства (35) скалярно на вектор H_3^*, убеждаемся, что $a_0(H_3) = 0$, то есть $(A+\beta C-\beta^2 B_0)H = 0$. Представим вектор H в виде $H = cH_3^* + H^0$, $c = \int\limits_\Omega H_3 dx/|\Omega|$. Тогда $H^0 \in V_0$, и $(A + \beta C - \beta^2 B_0)H^0 = 0$, то есть (β, H^0) – решение задачи (25).

Пусть $\widehat{V}_\Omega = \left[W_2^1(\Omega)\right]^2$. Определим операторы $\widehat{A}$, $\widehat{B}_0 : \widehat{V}_\Omega \to \widehat{V}_\Omega$, $\widehat{C_0} : \widehat{V}_\Omega \to W_2^1(\Omega)$, $L : W_2^1(\Omega) \to W_2^1(\Omega)$ и $\widehat{C_1} : W_2^1(\Omega) \to$

$\widehat{V}_\Omega$ при помощи следующих тождеств, понимая соответствующим образом операторные скобки:

$$(\widehat{A}\mathbf{H},\mathbf{H}') = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{n^2}\,\mathrm{rot}\;\mathbf{H}\,\overline{\mathrm{rot}\;\mathbf{H}'} + \frac{1}{n_\infty^2}\,\mathrm{div}\;\mathbf{H}\,\overline{\mathrm{div}\;\mathbf{H}'}\right) dx +$$

$$+\frac{2\pi}{n_\infty^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| a_n(\mathbf{H})\cdot\overline{a_n(\mathbf{H}')}+$$

$$+\frac{2\pi i}{n_\infty^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left(a_n(H_1)\cdot\overline{a_n(H_2')} - a_n(H_2)\cdot\overline{a_n(H_1')}\right),$$

$$(\widehat{B}_0\mathbf{H},\mathbf{H}') = \int\limits_\Omega \left(1/n_\infty^2 - 1/n^2\right)\mathbf{H}\cdot\overline{\mathbf{H}'}\,dx,$$

$$(\widehat{C}_0\mathbf{H},\eta) = i\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_\infty^2}\right)\mathbf{H}\cdot\overline{\nabla\eta}dx,$$

$$(\widehat{C}_1\eta,\mathbf{H}) = -i\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_\infty^2}\right)\nabla\eta\cdot\overline{\mathbf{H}}dx,$$

$$(L\eta,\eta') = \int\limits_\Omega \frac{1}{n^2}\nabla\eta\cdot\overline{\nabla\eta'}\,dx + \frac{2\pi}{n_\infty^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|a_n(\eta)\overline{a_n(\eta')} + a_0(\eta)\overline{a_0(\eta')}.$$

Уравнение (35) может быть записано теперь в следующем блочном виде:

$$\begin{pmatrix} \widehat{A} & \beta\widehat{C}_1 \\ \beta\widehat{C}_0 & L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ H_3 \end{pmatrix} = \beta^2\begin{pmatrix} \widehat{B}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ H_3 \end{pmatrix}.$$

Оператор L положительно определен. Исключая H_3, получим линейную задачу на собственные значения

$$\widehat{A}\mathbf{H} = \beta^2(\widehat{B}_0 + \widehat{C}_1 L^{-1}\widehat{C}_0)\mathbf{H}$$

относительно спектрального параметра β^2. Очевидно, собственные значения этой задачи равны квадратам точек отсечки β_k^0.

6. Поведение дисперсионных кривых

Дисперсионными кривыми будем называть функции $\sigma_k(\beta)$, $k = 1, 2, \ldots$, определенные на интервалах (β_k^0, ∞), где β_k^0 – точки отсечки. При заданном $\beta > \beta_k^0$ значение функции $\sigma_k(\beta)$ определяется как единственное решение уравнения (23). Изучим свойства функций $\sigma_k(\beta)$. В качестве иллюстрации на рис. 3 приведены дисперсионные кривые для однородного волновода кругового поперечного сечения, построенные на основе решения характеристического уравнения [2].

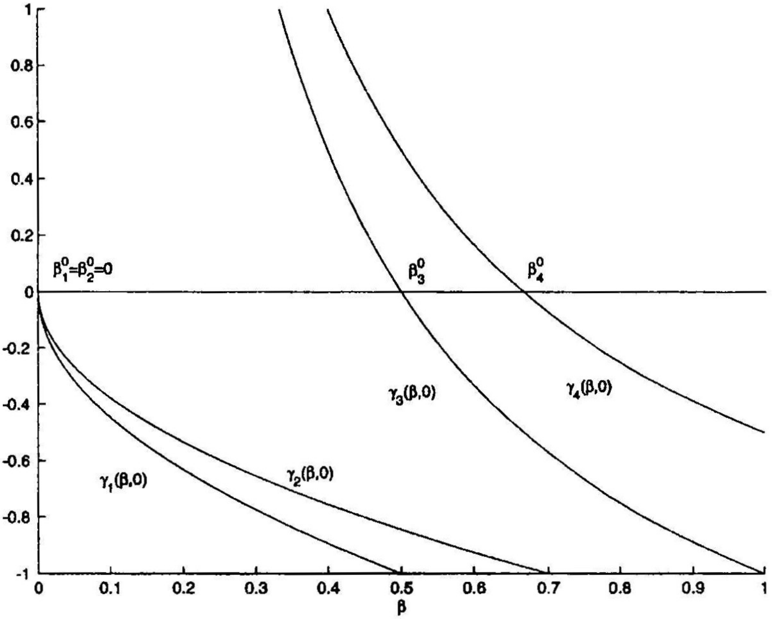

Рис.3. Дисперсионные кривые для однородного волновода кругового поперечного сечения.

Лемма 6 . *Для любого $k = 1, 2, \ldots$ функция $\beta\gamma_k(\beta, \sigma)$, где $\gamma_k(\beta, \sigma)$ определена равенством (20), локально липшицева по β на множестве*

$$D = \{\beta \geq 0,\ \sigma \geq 0 :\ \gamma_k(\beta, \sigma) \leq 0\}.$$

Точнее, существует такая константа c, не зависящая от β и σ, что

$$|\beta\gamma_k(\beta,\sigma) - \widehat{\beta}\gamma_k(\widehat{\beta},\sigma)| \le c\max\{\beta,\widehat{\beta}\}|\beta - \widehat{\beta}| \tag{36}$$

для любых β, $\widehat{\beta}$, σ из множества D.

Доказательство. Пусть β, $\widehat{\beta}$, σ произвольные числа из множества D. По определению (20) имеем

$$\beta\gamma_k(\beta,\sigma) = \inf_{V_k \subset V_\Omega} \sup_{H \in V_k, (BH,H)=1} R_\sigma(\beta, H), \tag{37}$$

где $R_\sigma(\beta,H) = ((A + \beta C - \beta^2 B_0 + S(\sigma))H, H)$. Справедливо равенство

$$R_\sigma(\widehat{\beta}, H) - R_\sigma(\beta, H) = (\widehat{\beta} - \beta)(CH, H) - (\widehat{\beta}^2 - \beta^2)(B_0 H, H).$$

Пусть $(BH, H) = 1$. Согласно лемме 3 имеем $R_\sigma(\beta, H) + \lambda\beta^2 \ge \frac{1}{2}(AH, H)$,

$$(B_0 H, H) \le \delta,$$

$$|(CH,H)| \le 2\delta\left(\int_\Omega |\nabla H_3|^2 dx\right)^{1/2} \le 2\delta n_\infty (AH, H)^{1/2},$$

где параметры δ, λ определен в условии леммы 3. Используя эти неравенства, получаем

$$|(CH,H)| \le 4\delta n_\infty \left(R_\sigma(\beta,H) + \lambda\beta^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$R_\sigma(\widehat{\beta}, H) \le$$

$$\le R_\sigma(\beta,H) + \delta|\widehat{\beta} - \beta| \left(4n_\infty \left(R_\sigma(\beta,H) + \lambda\beta^2\right)^{1/2} + (\widehat{\beta} + \beta)\right).$$

Из этого неравенства и равенства (37) имеем

$$\widehat{\beta}\gamma_k(\widehat{\beta},\sigma) \le$$

$$\le \beta\gamma_k(\beta,\sigma) + \delta|\widehat{\beta} - \beta| \left(4n_\infty \left(\beta\gamma_k(\beta,\sigma) + \lambda\beta^2\right)^{1/2} + (\widehat{\beta} + \beta)\right).$$

По предположению $\gamma_k(\beta,\sigma) \le 0$, следовательно,

$$\widehat{\beta}\gamma_k(\widehat{\beta},\sigma) - \beta\gamma_k(\beta,\sigma) \le \delta(4n_\infty\sqrt{\lambda} + 2)\max\{\beta,\widehat{\beta}\}|\widehat{\beta} - \beta|.$$

Меняя здесь местами β и $\widehat{\beta}$, получаем оценку (36). Лемма доказана

Теорема 3 . *Для любого $k = 1, 2, \ldots$, справедливы утверждения:*

a) функция $\sigma_k(\beta)$ - неубывающая функция $\beta \in (\beta_k^0, \infty)$;

b) функция $\sigma_k^2(\beta)$ локально липшицева по β на интервале (β_k^0, ∞);

c) $\lim\limits_{\beta \to \infty} \sigma_k(\beta)/\beta = \left(1 - (n_\infty/n_+)^2\right)^{1/2}$.

Доказательство. Докажем свойство a). Согласно лемме 5, для любого $k = 1, 2, \ldots$ функция $\gamma_k(\beta, \sigma)$ является непрерывной невозрастающей функцией $\beta > 0$. Пусть $\widehat{\beta} > \beta$. Заметим, что решение уравнения (23) существует лишь при $\gamma_k < 0$. Учитывая это, получаем цепочку неравенств

$$-\sigma_k^2(\widehat{\beta})/n_\infty^2 = \widehat{\beta}\gamma_k(\widehat{\beta}, \sigma_k(\widehat{\beta})) \le \beta\gamma_k(\widehat{\beta}, \sigma_k(\widehat{\beta})) \le \beta\gamma_k(\beta, \sigma_k(\widehat{\beta})) =$$

$$= \beta\left(\gamma_k(\beta, \sigma_k(\widehat{\beta})) - \gamma_k(\beta, \sigma_k(\beta))\right) - \sigma_k^2(\beta)/n_\infty^2.$$

Итак, справедливо неравенство

$$\left(\sigma_k^2(\widehat{\beta}) - \sigma_k^2(\beta)\right)/n_\infty^2 \ge \beta\left(\gamma_k(\beta, \sigma_k(\beta)) - \gamma_k(\beta, \sigma_k(\widehat{\beta}))\right)$$

Согласно лемме 5, для любого $k = 1, 2, \ldots$ функция $\gamma_k(\beta, \sigma)$ является непрерывной неубывающей функцией $\sigma \ge 0$. Следовательно, из последнего неравенства заключаем, что $\sigma_k(\widehat{\beta}) \ge \sigma_k(\beta)$.

Докажем теперь свойство b). Не ограничивая общности, предположим, что $\widehat{\beta} > \beta > 0$. Из свойства a) и оценки (36) следует

$$0 \le \left(\sigma_k^2(\widehat{\beta}) - \sigma_k^2(\beta)\right)/n_\infty^2 = \beta\gamma_k(\beta, \sigma_k(\beta)) - \widehat{\beta}\gamma_k(\widehat{\beta}, \sigma_k(\widehat{\beta})) \le$$

$$\le \beta\gamma_k(\beta, \sigma_k(\beta)) - \widehat{\beta}\gamma_k(\widehat{\beta}, \sigma_k(\beta)) \le c\max\{\beta, \widehat{\beta}\}|\widehat{\beta} - \beta|,$$

поскольку функция $\gamma_k(\beta, \sigma)$ не убывает по σ.

Докажем свойство c). Из равенства

$$-\sigma_k^2(\beta)/\beta^2 = n_\infty^2\gamma_k(\beta, \sigma_k(\beta))/\beta$$

и неравенства (21) следует оценка

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{\sigma_k^2(\beta)}{\beta^2} \ge 1 - \frac{n_\infty^2}{n_+^2}.$$

С другой стороны, согласно теореме 1, если (β, σ, H) - решение задачи (13), то справедливо неравенство (14). Отсюда следует справедливость свойства c). Теорема доказана.

7. Аппроксимация задачи

Для построения дискретного аналога задачи (13) воспользуемся методом конечных элементов. Этот метод позволит нам свести задачу (13) к конечномерной задаче аналогичного (13) вида. Для этого необходимо описать аппроксимацию пространств $V_\Omega = \left[W_2^1(\Omega)\right]^3$ и $V_\Gamma = \left[W_2^{1/2}(\Gamma)\right]^3$.

Разобьем окружность Γ на n_Γ равных частей γ_i длины h:

$$\gamma_i = \left\{(R, \varphi) : \varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}\right\}, \quad i = 1, ..., n_\Gamma, \quad \varphi_{n_\Gamma+1} = \varphi_1.$$

Ломаную, полученную соединением соседних узлов на Γ, обозначим через Γ_h. Далее, область Ω разобьем на треугольники τ максимального диаметра h, так чтобы два соседних треугольника имели либо общую сторону, либо общую вершину. Множество всех полученных треугольников обозначим через T_h. Будем считать, что $\Omega_h = \bigcup\limits_{\tau \in T_h} \tau \subset \Omega$, $\partial\Omega_h = \Gamma_h$. Множество вершин треугольников из T_h будем называть узлами сетки. Общее число узлов обозначим через n, через n_Ω - число внутренних узлов.

Пусть V_Γ^h - множество непрерывных на Γ функций из V_Γ, линейных на каждом элементе γ_i. Базис Лагранжа в нем обозначим через

$$[\{\psi_i, i = 1, ..., n_\Gamma\}]^3.$$

Таким образом,

$$H^h = (H_1^h, H_2^h, H_3^h), \quad H_k^h = \sum_{i=1}^{n_\Gamma} H_{ki}\psi_i \quad \forall H^h \in V_\Gamma^h. \qquad (38)$$

Пусть, далее, V_Ω^h - множество непрерывных в области Ω_h функций из V_Ω, линейных на каждом конечном элементе $\tau \in T_h$. Базис Лагранжа в нем обозначим через $[\{\phi_i, i = 1, ..., n\}]^3$, так что

$$H_h = (H_{h1}, H_{h2}, H_{h3}), \quad H_{hk} = \sum_{i=1}^{n} H_{ki}\phi_i \quad \forall H_h \in V_\Omega^h. \qquad (39)$$

Отметим, что функции H_h и H^h совпадают в граничных узлах сетки, и H^h однозначно определяется по H_h. Дискретная задача определяется следующим образом:

Найти все такие пары $(\beta, \sigma) \in \Lambda$ и $H_h \in V_\Omega^h \setminus \{0\}$, удовлетворяющие при любых $\mathrm{H}'_h \in V_\Omega^h$ тождеству :

$$\int\limits_{\Omega_h} \left(\frac{1}{n^2} \operatorname{rot} \mathrm{H}_h \overline{\operatorname{rot} \mathrm{H}'_h} + \frac{1}{n_\infty^2} \operatorname{div} \mathrm{H}_h \overline{\operatorname{div} \mathrm{H}'_h} + \frac{1}{n^2} \nabla H_{h3} \cdot \overline{\nabla H'_{h3}} \right) dx +$$

$$+ \frac{2\pi}{n_\infty^2} \sum_{n=-m}^{m} |n| a_n(H^h) \cdot \overline{a_n((H')^h)} +$$

$$+ \frac{2\pi i}{n_\infty^2} \sum_{n=-m}^{m} n\big(a_n(H_1^h) \cdot \overline{a_n((H_2')^h)} - a_n(H_2^h) \cdot \overline{a_n((H_1')^h)}\big) +$$

$$+ \beta i \int\limits_{\Omega_h} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_\infty^2} \right) \left(\mathrm{H}_h \cdot \overline{\nabla H'_{h3}} - \nabla H_{h3} \cdot \overline{\mathrm{H}'_h} \right) dx -$$

$$- \beta^2 \int\limits_{\Omega_h} \left(\frac{1}{n_\infty^2} - \frac{1}{n^2} \right) \mathrm{H}_h \cdot \overline{\mathrm{H}'_h} \, dx +$$

$$+ \frac{2\pi\sigma R}{n_\infty^2} \sum_{n=-m}^{m} \frac{K_{|n|-1}(\sigma R)}{K_{|n|}(\sigma R)} a_n(H^h) \cdot \overline{a_n(H'^h)} = -\frac{\sigma^2}{n_\infty^2} \int\limits_{\Omega_h} H_h \cdot \overline{H'_h} \, dx.$$

Величина m, участвующая в формулировке дискретной задачи, является дополнительным параметром и выбирается из соображений точности решения, функции H^h и H_h определяются формулами (38) и (39) соответственно.

Отдельные слагаемые в этом тождестве порождают соответствующие эрмитовы матрицы и дискретная задача может быть записана в виде

$$\left(A^h + \beta C^h - \beta^2 B_0^h + S^{hm}(\sigma)\right) H = -(\sigma^2/n_\infty^2) B^h H, \tag{40}$$

или, короче, при фиксированном $\beta > 0$ как

$$\text{find } \sigma > 0 \text{ and } H \neq 0 : \quad A(\sigma) H = 0, \tag{41}$$

где H – вектор узловых параметров функции H_h имеет длину $3n$, матричнозначная функция $A(\sigma)$ определяется так, что $A(\sigma)H$

есть разность левой и правой части в (40). Отметим, что в определении указанных матриц имеются стандартные для метода конечных элементов части, связанные с интегралами по области Ω_h. Несколько необычными кажутся добавки, связанные с вычислением граничных интегралов, входящих в определение коэффициентов Фурье $a_n(H^h)$. Учет таких слагаемых приводит к вычислению величин $a_n(\psi_i)\cdot\overline{a_n(\psi_j)}$, и для них нетрудно получить явные формулы.

Отметим также, что все матрицы и матричнозначные функции в задаче (40) автоматически наследуют свойства соответствующих операторов задачи (13). В частности все матрицы являются эрмитовыми, квадратичная форма $S^{hm}(\sigma)H \cdot \overline{H}$ является неубывающей функцией параметра σ, матрица B^h является положительно определенной. Наличие указанных свойств позволяет полностью перенести проведенный нами анализ разрешимости исходной задачи (13) на дискретную задачу (40).

Итак, окончательно, дискретная задача при фиксированных $\beta > 0$ формулируется как нелинейная задача на собственные значения (относительно параметра σ) вида (40) или (41). Отметим, что для построения дисперсионных кривых эта задача должна решатся многократно при различных β.

Укажем два метода нахождения решения этой задачи.

7.1. Алгоритм частичной линеаризации.

Рассмотрим задачу в форме (40). Сформулируем ее в следующем виде: найти все решения σ уравнения

$$\gamma(\sigma) = -\sigma^2/n_\infty^2, \tag{42}$$

где $\gamma = \gamma(\sigma)$ – собственные значения линейной обобщенной спектральной задачи

$$(\gamma, H) \in \mathbf{R} \times [C^n]^3 \setminus \{0\} : \quad (A^h + \beta C^h - \beta^2 B_0^h + S^{hm}(\sigma))H = \gamma B^h H. \tag{43}$$

Отметим, что функция $\gamma = \gamma(\sigma)$ монотонно не убывает по σ. Найденные σ и собственные векторы H, отвечающие собственным значениям $\gamma(\sigma)$, будут очевидно решениями задачи (40).

Таким образом, чтобы получить решение задачи (40), надо решить уравнение (42). Для этого можно использовать, например, любой метод нахождения нуля функции одной переменной на заданном интервале, требующий только вычисления значения функции в точке. Последнее, в свою очередь, требует умения находить k-тое решение линейной спектральной задачи (43). В силу монотонности функции $\gamma(\sigma)$ и эрмитовости матриц эти задачи являются стандартными для вычислительной математики.

Приведем алгоритм метода.

1. **Определения числа решений.** Для определения числа решений используем дискретный аналог уравнения отсечки (25). Число решений этого уравнения равно числу решений искомой задачи. Обозначим это число через N.

2. **Нахождение решения.** Для каждого фиксированного k, $k = 1, ..., N$, в интервале K – интервале локализации параметров β и σ (напомним, что параметр β фиксируется) ищется решение скалярного уравнения

$$\gamma_k(\sigma) + \sigma^2/n_\infty^2 = 0.$$

   Функция $\gamma_k(\sigma)$ определяется как k-тое собственное число (в порядке возрастания) линейной спектральной задачи (43).

Указанный метод является простым с точки зрения программирования, однако, он требует больших затрат времени для решения линейных спектральных задач. В силу этого метод может оказаться не эффективным для расчетов на больших сетках (соответствующих большим значениям n).

7.2. Метод обратных итераций с невязкой.

Этот метод для решения нелинейной задачи на собственные значения был предложен Ньюмайером в [24]. Для нелинейной задачи на собственные значения

$$\text{найти } \sigma > 0 \text{ и } H \neq 0: \quad A(\sigma)H = 0,$$

он определяется следующим образом:

$$H^{(l+1)} = c_l \left(H^{(l)} - A(\sigma_0)^{-1} A(\sigma_{l+1}) H^{(l)} \right),$$

где c_l – константа, такая что $\|H^{(l+1)}\| = 1$, σ_0 – начальное приближение к искомому собственному значению σ и σ_{l+1} – решение скалярного уравнения

$$A(\sigma)H^{(l)} \cdot \overline{H^{(l)}} = 0.$$

В работе [24] доказана локальная сходимость метода, а также установлено, что в случае эрмитовой дважды непрерывно-дифференцируемой по параметру σ матрицы $A(\sigma)$ имеют место следующие оценки сходимости:

$$\frac{\|H^{(l+1)} - H\|}{\|H^{(l)} - H\|} = O(|\sigma_0 - \sigma|), \quad |\sigma^{(l+1)} - \sigma| = O(\|H^{(l)} - H\|^2).$$

Здесь H – собственный вектор, соответствующий σ. При помощи метода обратных итераций с невязкой можно найти все собственные числа при условии выбора достаточно хороших начальных приближений.

Алгоритм метода обратных итераций с невязкой состоит в следующем:

1. **Выбор начального приближения.** Для определения числа решений используем дискретный аналог уравнения отсечки (25). В результате мы будем иметь достаточно хорошие начальные приближения ко всем искомым собственным числам и собственным функциям, а также общее их число. Предположим, что $H^{(0)}$ – начальное приближение к H, σ_0 – начальное приближение к σ.

2. **Итерационный процесс.** До выполнения критерия остановки для $l = 0, 1, \ldots$ выполняем следующие операции:

   (a) Вычисляем очередное приближение σ_{l+1} к σ решая скалярное уравнение
   $$A(\sigma_{l+1})H^{(l)} \cdot \overline{H^{(l)}} = 0.$$

   (b) Вычисляем невязку:
   $$r^{(l)} := A(\sigma_{l+1})H^{(l)}$$

   (c) Вычисляем очередное приближение $H^{(l+1)}$ к H решая уравнение
   $$A(\sigma_0)\Delta H^{(l)} = r^{(l)},$$
   и нормируя вектор
   $$\overline{H}^{(l+1)} := H^{(l)} - \Delta H^{(l)}, \qquad H^{(l+1)} := \frac{\overline{H}^{(l+1)}}{\|\overline{H}^{(l+1)}\|}.$$

Итерационного процесс останавливается, если относительная ошибка собственного числа достигает заданной точности ε, т.е.

$$\frac{|\sigma^{(l+1)} - \sigma^{(l)}|}{\sigma^{(l+1)}} \le \varepsilon.$$

8. Результаты тестовых вычислений

Основной целью работы с практический точки зрения является поиск эффективных методов расчета диэлектрических волноводов различных поперечных сечений. Поперечное сечение волновода должно быть лишь ограниченной областью, причем не обязательно односвязной.

Для проверки правильности работы алгоритмов и корректности применения методов решения рассматриваемой проблемы необходимо иметь тестовые задачи, решение которых известно априори. Как уже указывалось во введении, существуют целые группы или классы диэлектрических волноводов, для которых, исходя из их физических свойств, удается получить точные решения аналитическим путем.

Рассмотрим диэлектрический волновод кругового поперечного сечения: пусть граница волновода Γ представляет собой окружность радиуса R. Для волноводов этого типа получено трансцендентное уравнение, связывающее параметры β и ω [2]. Это уравнение можно получить методом разделения переменных. Оно имеет следующий вид:

$$\left[n_1^2\widetilde{\rho}_2\frac{J'_m(\widetilde{\chi}_1)}{J_m(\widetilde{\chi}_1)} + n_2^2\widetilde{\chi}_1\frac{K'_m(\widetilde{\rho}_2)}{K_m(\widetilde{\rho}_2)}\right]\left[\widetilde{\rho}_2\frac{J'_m(\widetilde{\chi}_1)}{J_m(\widetilde{\chi}_1)} + \widetilde{\chi}_1\frac{K'_m(\widetilde{\rho}_2)}{K_m(\widetilde{\rho}_2)}\right] = \tag{44}$$

$$= \left[\frac{(\beta R)(k_0R)(n_1^2 - n_2^2)m}{\widetilde{\chi}_1\widetilde{\rho}_2}\right]^2, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{45}$$

Здесь, $\widetilde{\chi}_1 = \chi_1 R$, $\widetilde{\rho}_2 = -i\chi_2 R$,

$$\chi_j(\beta) = \sqrt{k_0^2 n_j^2 - \beta^2}, \quad j = \overline{1,2},$$

$$k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0, \quad \varepsilon_k = \varepsilon_0 n_k^2, \quad k = \overline{1,2}.$$

β	1.0	2.2	2.4049	2.6
$N(\beta)$	2	2	2	4
$\sigma_1(\beta)$	0.08214	1.03797	1.20912	1.37001
$\sigma_2(\beta)$	0.08214	1.03797	1.20912	1.37001
σ_0	0.01	1.55563	1.70052	1.83848
σ_h	0.078	1.02096	1.19	1.35
t_1	17.85	22.85	18.12	18.02
t_2	41.02	48.39	38.45	44.05
δ	0.004	0.018	0.019	0.02

Таблица 1. Результаты тестовых вычислений.

$J_n(z)$ – функции Бесселя первого типа, $K_n(z)$ – модифицированные функции Бесселя второго типа.

При программировании этого трансцендентного уравнения оказываются полезными следующие реккурентные соотношения, справедливые для функций Бесселя:

$$\frac{J_n'(z)}{J_n(z)} = \frac{J_{n-1}(z)}{J_n(z)} - \frac{n}{z}, \quad \frac{K_n'(z)}{K_n(z)} = \frac{n}{z} - \frac{K_{n+1}(z)}{K_n(z)}.$$

Напомним, что при решении задачи спектральный параметр β фиксируется, а параметр σ ищется. Поэтому указанное выше трансцендентное уравнение мы разрешали относительно параметра ω^2, далее по формуле $\sigma = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_\infty^2}$ находили параметр σ.

Для проверки эффективности методов была решена тестовая задача для однородного волновода кругового поперечного сечения на сетке из 146 узлов. В наших вычислениях мы брали те же параметры бегущих волн, как в [25]: $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$, $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{2}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2} = 1$, радиус волновода равен 1, $R = 1.5$. В этом случае только трансцендентные уравнения (44) с номерами $m = 0$, 1 имеют положительные корни σ такие, что $(\beta, \sigma) \in K$. В таблице приведены некоторые результаты экспериментов,

где $N(\beta)$ – число точных решений $\sigma_i(\beta)$, $i = 1, \ldots, 4$ при данном β, σ_0 – начальное приближение, σ_h – приближенное решение, t_1 – время работы алгоритма метода обратных итераций с невязкой, t_2 – время работы алгоритма частичной линеаризации, δ – абсолютная ошибка.

Из таблицы видно, что метод обратных итераций с невязкой, как и ожидалось, работает быстрее, чем метод частичной линеаризации, а потому является более предпочтительным.

Литература

[1] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д. it Собственные волны диэлектрических волноводов сложного сечения (обзор) // Радиотехн. и электроника. - 1979. - Т. 24, №7. - С.1245–1263.

[2] Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов.* – М.: Радио и связь, 1987. – 656 с.

[3] Клеев А.И., Маненков А.Б., Рожнев А.Г. *Численные методы расчета диэлектрических волноводов (волоконных световодов). Универсальные методики (обзор)* // Радиотехн. и электроника. - 1993. - Т. 38, №11. - С.1938–1968.

[4] Карчевский Е.М. Об определении постоянных распространения собственных волн диэлектрических волноводов методами теории потенциала // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. - 1998. - Т.38, №1. - С.136–140.

[5] Карчевский Е.М. *Исследование численного метода решения спектральной задачи теории диэлектрических волноводов* // Изв. вузов. Математика. - 1999. - №1. - С.10–17.

[6] Карчевский Е.М. *Исследование задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов* // Дифференц. уравн. - 2000. - Т.36, №7. - С.998–999.

[7] Givoli D. *Nonreflecting boundary conditions* // J. Comput. Phys. - 1991. - V. 94. - P.1–29.

[8] Свешников А.Г. *Дифракция на звездном теле* // Выч. методы и программирование. Вып. 13. - М.: Изд-во Московского ун-та, 1969. - С.145–151.

[9] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. *Математические модели электродинамики.* – М.: Высшая школа, 1991.

[10] Givoli D., Keller J.B. *Exact non-reflecting boundary conditions* // J. Comput. Phys. – 1989. – V. 82. – P.172–192.

[11] Brezzi F., Johnson C. *On the coupling of boundary integral and finite element methods* // Estratto da Colcolo. – 1979. – Vol. XVI, №11.

[12] MacCamy, Marin S.P. *A finite element method for exterior interface problems* // Int. J. Math. Math. Sci. – 1980. – №3. – P.311–350.

[13] Goldstein C.I. *A finite element method for solving Helmholtz type equations in wave guides and other unbounded domains* // Math. Comput. – 1982. – №39. – P.309–324.

[14] Кузнецов С.Б. *Комбинирование метода конечных элементов с методом граничных интегральных уравнений* // В сб.: Вариационно-разностные методы в задачах численного анализа. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987.

[15] Gregus M., Khoromsky B.N., Mazurkevich G.E., Zhidkov E.P. *Combined algorithms in nonlinear problems of magnetostatics* // Communication JINR, E11-88-481. 1988.

[16] Даутов Р.З., Карчевский Е.М. *Об одной спектральной задаче теории диэлектрических волноводов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1999. – Т. 39, №8. – С.1293–1299.

[17] Даутов Р.З., Карчевский Е.М. *Существование и свойства решений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40, №8. – С.1250–1263.

[18] Bamberger A., Bonnet A.S. *Mathematical analysis of the guided modes of an optical fiber* // SIAM J. Math. Analys. – 1990. – V. 21, №6. – P.1487–1510.

[19] Bonnet-Ben Dhia A.S., Joli P. *Mathematical analysis of guided water waves* // SIAM J. Appl. Math. – 1993. – V. 53, №6. – P.1507–1550.

[20] Сухинин С.В. *Собственные колебания около пластины в канале* // Прикл. механ. и техн. физ. – 1998. – Т.39, №2. – С.78–90.

[21] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971.

[22] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции.* – М.: Наука, 1968.

[23] Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* – М.: Мир, 1972.

[24] Neumaier A. *Residual inverse iteration for the nonlinear eigenvalue problem* // SIAM J. Numer Anal. – 1985. – Vol. 22, № 5. – P.914–923.

[25] Joly P., Poirier Ch. *A numerical method for the computation of electromagnetic modes in optical fibres* // Math. Meth. Appl. Sci. – 1999. – №22. - P.389–447.

[26] Даутов Р.З., Карчевский Е. М. *О решении векторной задачи о собственных волнах цилиндрических диэлектрических волноводов на основе нелокального краевого условия* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – Т. 42, №7. – С.1051–1066.